DOI: doi.org/10.21009/0305020504

ANALISIS DAN VISUALISASI PERSAMAAN KLEIN-GORDON PADA ELEKTRON DALAM SUMUR POTENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN PROGRAM MATHEMATIC 10

Syahrul Humaidi[1,a)], Tua Raja Simbolon[1,b)], Russell Ong[1,c)], Widya Nazri Afrida[1,d)]

[1]Prodi Fisika FMIPA USU, Jl. Bioteknologi No 1, Medan 20155

Email: [a)]humaidi2009@gmail.com, [b)]traja202@gmail.com, [c)]rsslong@gmail.com, [d)]widya.nazri@gmail.com

Abstrak

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan gelombang yang mampu menjelaskan perilaku elektron termasuk menentukan tingkat-tingkat energinya. Akan tetapi, ketika gerak elektron diasumsikan sebagai gerak relativisitik ($v \approx c$), maka persamaan Schrödinger harus diubah menjadi persamaan Klein-Gordon(persamaan Schrödinger relativistik). Untuk membandingkan kedua persamaan tersebut, kami menganalisis dan memvisualisasi persamaan Klein-Gordon pada elektron dalam sumur potensial menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica 10. Hasil visualisasi dari program Mathematica 10 memberikan grafik fungsi gelombang dan grafik rapat probabilitas yang sama dengan persamaan Schrödinger. Perbedaannya hanya terdapat pada visualisasi grafik tingkat-tingkat energi.

Kata-kata kunci: *Persamaan Klein-Gordon, Mathematica 10, elektron, tingkat-tingkat energi.*

Abstract

Schrödinger equation is a wave equation that describes the behaviour of an electron including determining its energy levels. However, when the motion of electrons was assumed as relativistic motion($v \approx c$), then the schrödinger equation must be changed into Klein-Gordon equation(relativistic Schrödinger equation). In order to compare both equations, we analyzed and visualized the Klein-Gordon equation for an electron in a potential well with Wolfram Mathematica 10 software. The visualization from Mathematica 10 gave the same wavefunction graphs and probability density graphs as the Schrödinger equation. The difference is only in the visualization of energy levels graphs.
.

Keywords:*Klein-Gordon equation, Mathematica 10, electron, energy levels.*

1. Pendahuluan

Persamaan Schrödinger merupakan persamaan pokok dalam mekanika kuantum. Seperti halnya hukum gerak kedua yang merupakan persamaan pokok dalam mekanika Newton dan seperti persamaan fisika umumnya, persamaan Schrödinger berbentuk persamaan differensial. Bentuk khusus persamaan Schödinger yaitu persamaan Schrödinger tak-bergantung waktu. Bentuk ini lebih sering digunakan karena energi medan potensial sistem fisika umumnya hanya bergantung pada posisi [1-2]. Akan tetapi, ketika kecepatan elektron mendekati kecepatan cahaya, maka persamaan Schrödinger tidak berlaku lagi. Persamaan gerak elektron harus diubah menjadi persamaan Schrödinger Relativistik (Persamaan Klein-Gordon)[3]. Perbedaan kedua persamaan tersebut terletak pada energi yang dimiliki oleh elektron[4]. Grafik yang telah dipelajari dan divisualisasikan selama ini adalah grafik Persamaan Schrödinger[5-6], oleh sebab itu pada penelitian ini kami memvisualisasi grafik Persamaan Klein-Gordon.

Dalam perhitungan secara teori jika dimasukkan variabel misalnya panjang sumur dalam nilai yang kecil maka akan dapat dihitung dengan mudah. tetapi jika panjang sumurnya semakin besar maka akan lebih sulit untuk menghitungnya secara teori. oleh sebab itu, kami membandingkan antara persamaan Schrödinger dengan persamaan Klein-Gordon dalam analisis dan visualisasi persamaan Klein-Gordon pada elektron dalam sumur potensial. Analsis dan visualisasi ini dibatasi hanya pada fungsi gelombang, rapat probabilitas, dan tingkat-tingkat energi. hasil visualisasi dari grafik ini akan memiliki kemiripan dengan Persamaan Schrödinger. Hal ini dikarenakan penurunan persamaan Klein-Gordon hanya mengubah energi total yang akan disubstitusikan oleh operator energi dan operator momentum.

Adapun perangkat lunak*(software)* yang digunakan untuk membuat animasi dan visualisasi Persamaan Schrödinger tersebut adalah Mathematica

10. Sebab Mathematica 10 merupakan perangkat lunak dengan bahasa pemrograman tingkat tinggi yang menampilkan teori materi pelajaran, rumus secara simbolik, animasi dan visualisasi dengan GUI *(Graphics User Interface)* dalam satu jendela *(window)* sekaligus serta bahsa pemrogramannya yang ringkas dan mudah dipahami[7]. Dengan animasi dan visualisasi ini diharapkan mampu memberi gambaran yang jelas dan mendasar serta menimbulkan ketertarikan dan kemudahan dalam mempelajari Persamaan Klein-Gordon karena kode programnya bersifat sederhana dan tidak rumit.

2. Metode Penelitian

Langkah awal yang dilakukan adalah memecahkan persamaan Klein-Gordon dengan metode analitik kemudian mencari pemecahannnya dengan metode komputasi. Pemecahan ini dilakukan dengan mencari solusi persamaan Klein-Gordon, yaitu berupa fungsi gelombang, rapat probabilitas dan tingkat – tingkat energi elektron. persamaan Klein-gordon untuk elektron:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + {m_0}^2 c^4 \psi(x) = E^2\psi(x) \qquad (1)$$

dimana solusi dari persamaan diatas adalah

$$\psi = A\, sin\sqrt{\frac{E^2 - {m_0}^2 c^4}{\hbar^2 c^2}}\,x + B\, cos\sqrt{\frac{E^2 - {m_0}^2 c^4}{\hbar^2 c^2}}\,x \qquad (2)$$

Jika elektron terperangkap didalam sumur potensial, maka akan berlaku syarat batas, yaitu ψ = 0 ketika x = 0 dan x = L. Dengan mensubstitusikan syarat batas tersebut, maka didapatkan

$$\psi = A sin\sqrt{\frac{E^2 - {m_0}^2 c^4}{\hbar^2 c^2}}\,L \qquad (3)$$

Agar syarat batas diatas terpenuhi, maka nilai

$$\sqrt{\frac{E^2 - {m_0}^2 c^4}{\hbar^2 c^2}}\,L = n\pi \text{ dengan n = 1, 2, 3, …} \qquad (4)$$

Untuk penjelasan lengkap bagaimana menjabarkan persamaan diatas, penulis dipersilahkan melihat [4]. Setelah itu, fungsi gelombang elektron dan rapat probabilitas dapat ditentukan dengan menerapkan persyaratan normalisasi pada persamaan (2) yang telah dioperasikan dengan syarat batas. Kemudian, kita menterjemahkan persamaan tersebut kedalam bahasa pemrograman Mathematica 10 [5].

Adapun algoritma program yang digunakan dalam perancangan program:

Input : memasukkan persamaan fungsi gelombang, rapat probablitias, dan tingkat energi elektron, memasukkan batas awal dan akhir untuk menemukan elektron, lebar sumur (L) yang digunakan beserta bilangan kuantum (n) dan memvisualisasikan dengan menggunakan fungsi plot.

Output : Menampilkan Probabilitas dan visualisasi tingkat energi, fungsi gelombang, dan rapat probabilitas persamaan Klein – Gordon pada elektron dalam sumur potensial.

Teknik analisis data yang kami lakukan yaitu dengan mengubah nilai bilangan kuantum, lebar sumur, batas atas, dan batas bawah. kemudian hasil visualisasi program Mathematica 10 akan dilihat kesesuaian berserta perbedaannya dengan grafik fungsi gelombang dan tingkat energi persamaan Schrödinger dari referensi

3. Hasil dan Pembahasan

Fungsi gelombang elektron diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (3), maka didapatkan

$$\psi(x) = A\, sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (5)$$

dimana kita telah menerapkan syarat batas sumur potensial. Pemecahan bagi ψ(x) belum lengkap, karena belum ditentukan tetapan A. Untuk menentukannya, ditinjau kembali persyaratan normalisasi, yaitu $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.[2] Karena ψ(x) = 0, kecuali untuk 0 ≤ x ≤ L sehingga berlaku:

$$\int_0^L |A^2| sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1 \qquad (6)$$

Maka diperoleh A = $\sqrt{2/L}$. Dengan demikian, pemecahan lengkap bagi fungsi gelombang untuk 0 0 ≤ x ≤ L adalah :

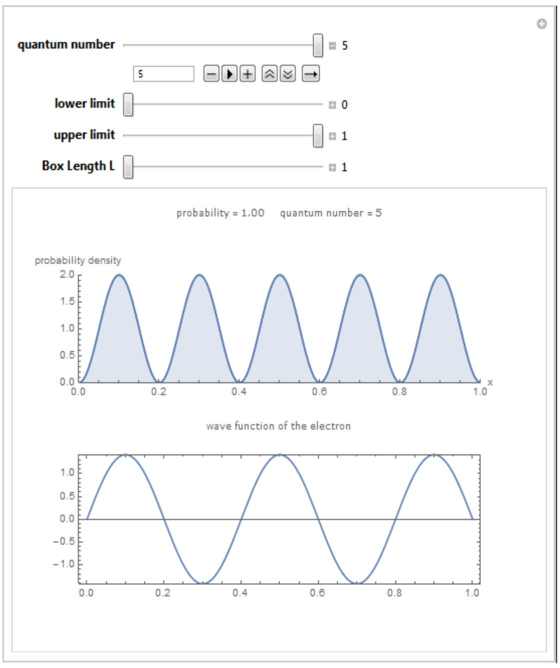
$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ n=1,2,3,…} \qquad (7)$$

Rapat probabilitas diperoleh hanya dengan memutlakkan kuadrat dari persamaan (7), sedangkan tingkat – tingkat energi diperoleh dari mengutak – atik persamaan (4), yaitu

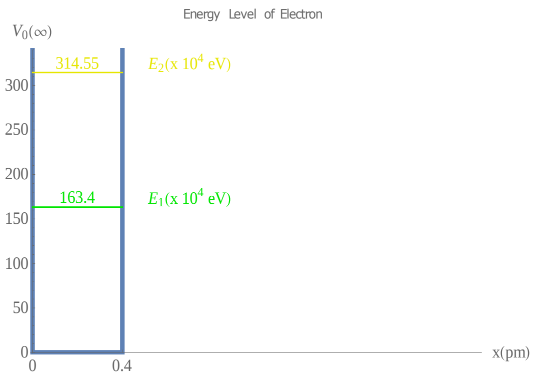
$$E_n = \sqrt{\frac{n^2\hbar^2 c^2}{4\,L^2} + m_0^2 c^4} \qquad (8)$$

Inilah fungsi gelombang dan rapat probabilitas yang merupakan solusi persamaan Klein – Gordon bebas waktu dalam sumur potensial yang akan kami visualisasikan berserta tingkat energinya.

Tampilan Output hasil eksekusi program :



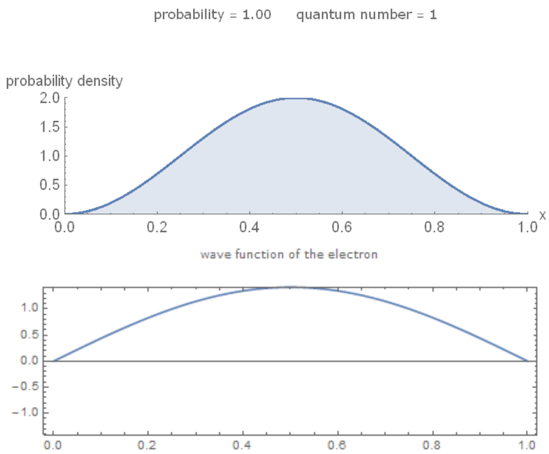
Gambar 1. *Hasil eksekusi grafik fungsi ψ dan kerapatan probabilitan ψ² dari program*



***Gambar 2.** Hasil eksekusi grafik tingkat-tingkat energi*

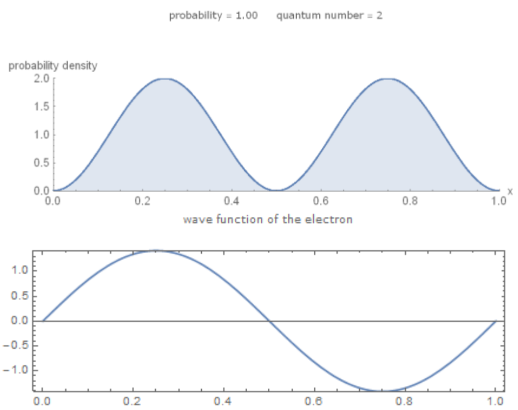
Program visualisasi grafik fungsi gelombang dan grafik rapat probabilitas dengan grafik tingkat – tingkat energi dibuat terpisah untuk menghindari program output yang terlalu panjang. *Lower limit* dan *upper limit* pada Gambar 1 adalah batas bawah dan batas atas untuk menemukan elektron. Berikut ini hasil *running* dan visualisasi gelombangnya :

a. n = 1, batas bawah = 0, batas atas = 1, dan panjang sumur = 1.



***Gambar 3.** Visualisasi $\psi_1(x)$ dan $|\psi_1(x)|^2$ dalam sebuah sumur potensial.*

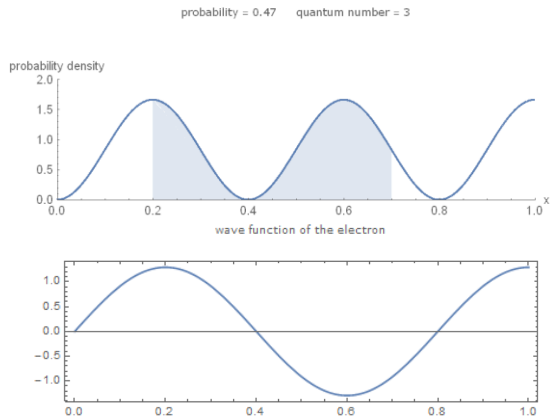
b. n = 2, batas bawah = 0, batas atas = 1, dan panjang sumur = 1.



***Gambar 4.** Visualisasi $\psi_2(x)$ dan $|\psi_2(x)|^2$ dalam sebuah sumur potensial.*

Gambar 4 menunjukkan maksimum probabilitasnya terjadi pada x = L/4 dan x = 3/4L, sedangkan probabilitas nol terjadi pada x = L/2. Hal itu mengilustrasikan perbedaan antara fisika klasik dengan fisika kuantun dimana partikel tidak mungkin dapat mencapai ¾ L dari L/4 tanpa melewati L/2. Hal ini disebabkan karena kecenderungan berpikir dalam partikel sedangkan fisika kuantum berpikir dalam pandangan gelombang.

c. n = 3, batas bawah = 0.2, batas atas = 0.7, L = 1.2 dan panjang sumur = 1.5.



***Gambar 5.** Visualisasi $\psi_3(x)$ dan $|\psi_3(x)|^2$ dalam sebuah sumur potensial.*

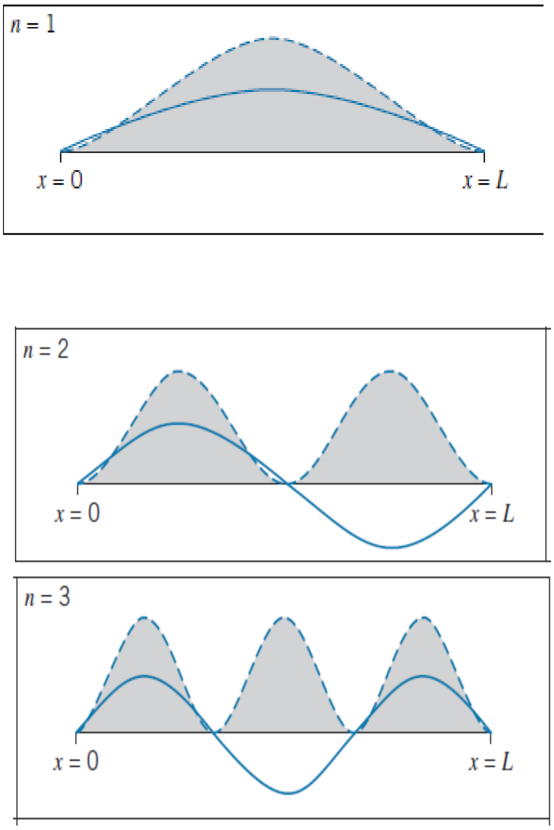
Dari hasil visualisasi terlihat bahwa Poin a dan b mempunyai *probability* = 1 sesuai dengan perhitungan:

$$\int_0^1 |\psi_1(x)|^2 dx = \int_0^1 |\psi_2(x)|^2 dx = 1 \qquad (9)$$

sedangkan poin c mempunyai *probability* = 0.47 karena nilai batas bawah, batas atas dan panjang sumur yang berbeda sesuai dengan perhitungan dibawah ini:

$$\int_{0.2}^{0.7} |\psi_3(x)|^2 dx = \int_{0.2}^{0.7} \left(\sqrt{\frac{2}{1.2}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{1.2}x\right) dx = 0.47 \qquad (10)$$

Jika kita bandingkan dengan hasil visualisasi persamaan Schrodinger dari referensi(Gambar 6), ternyata grafik fungsi gelombang dan rapat probabilitas kedua persamaan tersebut identik.

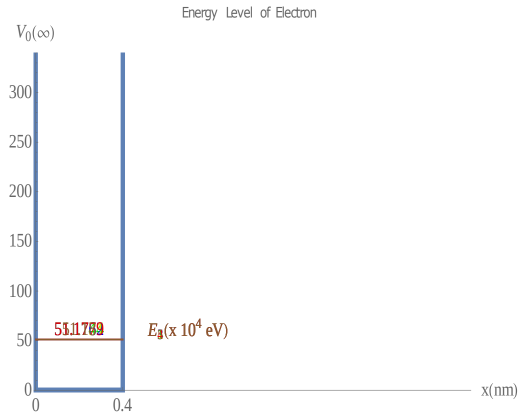


Gambar 6. *Fungsi gelombang(garis utuh) dan rapat probabilitas(garis putus - putus) untuk tiga keadaan pertama dalam potensial sumur satu dimensi[8].*

Pemecahan persamaan Klein-Gordon bagi sebuah elektron yang yang terperangkap dalam suatu daerah linier sepanjang L tidak lain adalah sederetan gelombang berdiri deBroglie karena arah merambat gelombang partikel dalam kotak sama dengan arah kecepatan partikel.

Berbeda dengan visualisasi sebelumnya, kode program untuk visualisasi grafik tingkat – tingkat energi dibuat dalam halaman program yang berbeda. Nilai – nilai yang disubstitusikan ke persamaan (8), yaitu: h = 6.64 x 10^{-34} Js, c = 3 x 10^{8} m/s, dan m_0 = 9,11 x 10^{-31} kg. Berikut hasil *running* dan visualisasi tingkat – tingkat energinya:

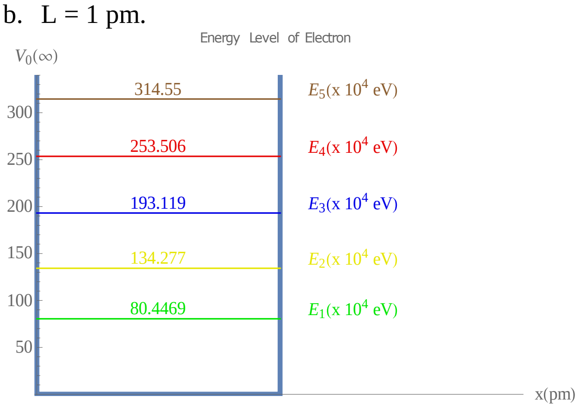
a. L = 0.4 nm.



Gambar 7. *Visualisasi tingkat – tingkat energi elektron untuk L = 0.4 nm.*

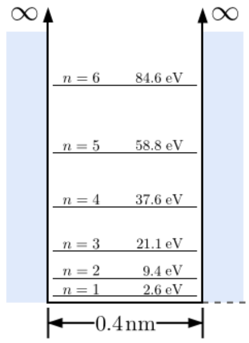
Semua elektron memiliki energi yang sama yaitu sekitar 50 x 10^4 eV .

b. L = 1 pm.



Gambar 8. *Visualisasi tingkat – tingkat energi elektron untuk L = 1 pm.*

Jika kita bandingan dengan grafik tingkat – tingkat energi persamaan Schrodinger dari referensi (gambar 9), maka terlihat bahwa keduanya sangat berbeda. Pada L = 0.4 nm, grafik tingkat – tingkat energi hasil analisis persamaan Klein – Gordon tampak tumpang tindih satu sama lain. Hal ini dikarenakan nilai m_0c^4 dan nilai $\frac{n^2h^2c^2}{4\,L^2}$ jauh berbeda. Nilai $m_0c^4 = 6.72\ x\ 10^{-27}$ J, sedangkan nilai $\frac{n^2h^2c^2}{4\,L^2} = \frac{n\ x\ 3.96\ x10^{-50}}{L^2}$ J.m^2 sehingga nilai bilangan kuantum n tidak berpengaruh jika substitusikan L = 0.4 nm. Untuk menampilkan tingkat energi dari lima bilangan kuantum pertama, nilai L harus diubah menjadi 1 pm.



Gambar 9. *Grafik tingkat-tingkat energi untuk elektron dalam sumur potensial berdasarkan analisis persamaan Schrödinger[9]*

4. Simpulan

Dari hasil penelitian, dapat diambil kesimpulan:

1. Grafik fungsi gelombang dan grafik probabilitas untuk pemecahan persamaan Klein-Gordon bagi sebuah partikel yang terperangkap dalam sumur potensial satu dimensi ternyata identik dengan grafik analisis persamaan Schrödinger. Hal ini disebabkan karena hasil pemecahan kedua persamaan tersebut menghasilkan fungsi gelombang yang sama, yaitu
$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$
2. Untuk mendapatkan grafik tingkat – tingkat energi yang jelas, Elektron yang bergerak dengan keadaan relativistik dalam sumur potensial harus berada di dalam lebar sumur yang lebih kecil daripada lebar sumur untuk elektron yang bergerak nonrelativistik. Perbedaan ini berkisar selebar 10^{-3} m.

Ucapan Terimakasih

Terima kasih kepada birokat Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan dan Biro Rektor Universitas Sumatera Utara(USU) yang telah memberikan dana untuk mendapatkan literatur referensi beserta dana keberangkatan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ).

Daftar Acuan

[1] Tipler AB, Llewellyn, RA. *Modern Physics*. 6th ed. New York, W.H. Freeman and Company (2012), p. 230-232

[2] Serway RA, Moses CJ, Moyer CA. *Modern Physics*. 3rd ed. United States of America, Thomson Learning Academic (2005), p. 197-200

[3] Mathur VS, Singh S. *Concepts in Quantum Mechanics*. 1st ed. New York, CRC Press (2009), p. 403

[4] C. F. Siahaan, Penentuan Tingkat-Tingkat Energi Gelombang Schrödinger Relativistik Tak Bergantung Waktu Untuk Partikel Dalam Kotak, Skripsi, Universitas Sumatera Utara, (2011).

[5] Y. Hulu, Analisis Dan Visualisasi Persamaan Schrödinger Pada Partikel Bebas Dan Partikel Dalam Sumur Potensial Dengan Menggunakan Program Mathematica 7, Skripsi, Universitas Sumatera Utara, (2011).

[6] T. Berutu, Solusi Persamaan Schrödinger Pada Partikel Bebas dan Partikel Dalam Kotak Dengan Menggunakan Metode Beda Hingga *(Finite Difference Methods)*, Skripsi, Universitas Sumatera Utara, (2010).

[7] T.T. Patrick. *A Physicist's Guide to Mathematica*®.2nd ed. New York, Elsevier Inc (2008), p. 16-18

[8] Krane KS. *Modern Physic.* 3rd ed. United States of America, John Wiley & Sons Inc (2012), p. 148

[9] https://en.wiki wikibooks.org/wiki/Materials_in_Electronics/Confined_Particles/1D_Finite_Wells. Diakses pada April, 27, 2016