

MENGEKSTRAK PARAMETER FISIS DARI DATA OBSERVASI (Contoh Kasus Percepatan Gravitasi Bumi)

Muhammad Hamzah Syahrudin

Geophysics, Physics Department, Hasanuddin University
Jl. Perintis Kemerdekaan Km. 10 Makassar, Indonesia.
e-mail : hamzah@fmipa.unhas.ac.id

Abstrak

Hampir semua data-data lapangan dari survey geofisika memerlukan inversi untuk mendapat parameter fisis dan model. Tujuan dari penelitian ini adalah mengekstrak variabel yang tidak diketahui (unknown variable) dan parameter fisis yang tidak diketahui (unknown parameter) dari data observasi lapangan. Contoh kasusnya adalah gerak jatuh bebas. Pengukuran data geofisika yaitu data ketinggian (h) dan waktu tempunya (t). Dengan melakukan pemodelan matematika dari data fisis hasil observasi maka dapat diperoleh hubungan antara h dan t dengan melibatkan parameter fisis. Selanjutnya model matematika tersebut dilakukan inversi untuk mendapatkan parameter fisis yang tidak diketahui. Dari parameter fisis tersebut dapat dibuat pemodelan geofisika Berdasarkan desain percobaan dan hasil pemodelan inversi diperoleh ketinggian awal (h_0) adalah 1,5 meter, kecepatan awal (v_0) adalah 6,28099 m/s, dan konstanta percepatan gravitasi bumi (g) adalah 9,8 m/s².

Kata kunci : experiential learning, Model Matematik, parameter fisis, Pemodelan inversi

Abstract

Almost the entire data field of geophysical surveys requires inversion to obtain physical parameters and models. The purpose of this study is to extract the unknown variables (unknown variable) and the physical parameters of the unknown (unknown parameters) of the data field observations. Examples of case studies, is a free fall motion. Measurement of geophysical data is data height (h) and travel time (t). By doing mathematical modeling of observation data can be obtained relationship between h and t . Furthermore, the mathematical models do inversion to get the physical parameters of the unknown. From these physical parameters can be made geophysical modeling. Based on the experimental design and inversion modeling results obtained initial height (h_0) is 1.5 meters, the initial velocity (v_0) is 6.28099 m / s, and the Earth's gravitational acceleration constant (g) is 9.8 m / s²

Keywords: experiential learning, Mathematical models, physical parameters, inversion modeling

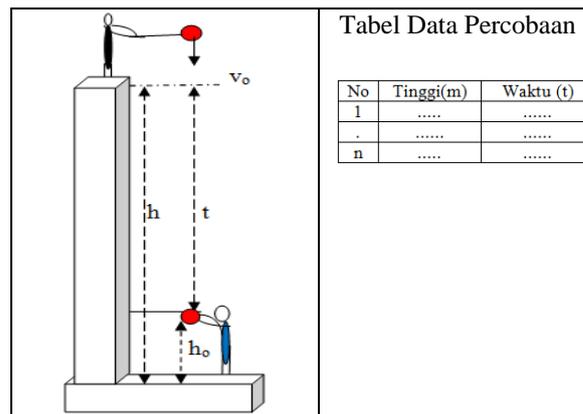
1. Pendahuluan

Dalam geofisika, kegiatan pengukuran lapangan selalu dilakukan berdasarkan prosedur yang sudah ditentukan. Kemudian, hasil pengukuran dicatat dan disajikan dalam bentuk tabel angka-angka pengukuran. Hasil pengukuran tersebut sudah barang tentu sangat tergantung pada kondisi dan sifat fisis batuan bawah permukaan. Tabel angka-angka itu selanjutnya disebut **data observasi** atau juga biasa disebut **data lapangan**. Untuk menerjemahkan data geofisika menjadi besaran yang menggambarkan distribusi sifat fisis bawah permukaan pada awalnya hanya dilakukan secara kualitatif dan semi-kuantitatif (Grandis, 2009). Saat ini, untuk memperoleh distribusi sifat fisis bawah permukaan secara lebih kuantitatif umumnya dilakukan melalui pemodelan.

Diharapkan dari data eksperimen, dapat memberi informasi sebanyak-banyaknya, tidak sekedar mengenai sifat fisis batuan saja, melainkan juga kondisi geometri batuan bawah permukaan dan posisi kedalaman batuan tersebut. Informasi itu hanya bisa kita dapat bila kita mengetahui hubungan antara sifat fisis batuan tersebut dan data observasinya. Penghubung dari keduanya hampir selalu berupa persamaan matematika atau kita menyebutnya sebagai **model matematis**. Maka dengan berdasarkan model matematika itulah, kita bisa mengekstrak parameter fisis batuan dari data observasi. Proses ini disebut proses **inversi** atau istilah asingnya disebut **inverse modelling**. Sementara proses kebalikannya dimana kita ingin memperoleh data prediksi hasil pengukuran berdasarkan parameter fisis yang sudah diketahui, maka proses ini disebut proses **forward** atau **forward modelling** (Meju dalam Supriyanto, 2007).

Metoda pembelajaran yang akan diujicoba dalam matakuliah metoda inversi geofisika ini adalah *experiential learning*. Tujuan dari pembelajaran ini adalah mengekstrak variabel yang tidak diketahui (*unknown variable*) dan parameter fisis yang tidak diketahui (*unknown parameter*) dari data observasi lapangan. Contoh kasusnya adalah gerak jatuh bebas. pengukuran data geofisika yaitu data ketinggian (h) dan waktu tempunya (t). Data geofisika tersebut dimodelkan secara matematika dalam bentuk persamaan matematika. Dengan menerapkan teori inversi pada persamaan matematika maka diperoleh parameter fisis lapangan. Dari paramter fisis inilah diperoleh hasil pemodelan inversi lapangan. Dengan menyelami tahapan-tahapan tersebut diyakini mahasiswa mendapatkan pengalaman baru belajar. Selain itu mahasiswa mampu menguasai dan menerapkan metoda inversi geofisika sesuai kompetensi yang diinginkan dari matakuliah ini. Tahapan pekerjaan dalam experiential learning adalah :

1. Persiapan peralatan laboratorium/lapangan pengukuran tinggi (h) dan waktu (t)
2. Observasi dan Pengukuran (h) dan (t)
3. Membuat Model Matematika (h) dan (t)
4. Penentuan variabel dan parameter fisis (*unknown*) dari model matematika (h) dan (t)
5. Pemodelan hasil inversi (h) dan (t)
6. Analisis hasil pemodelan



Gambar 1. Desain eksperimen pengukuran ketinggian (h) dan waktu (t)

Pada Gambar 1 dapat kita lihat bahwa terdapat empat variabel yaitu h , h_0 , v_0 dan t . Kemudian ada satu variabel yang tidak nampak pada Gambar 1, yaitu percepatan gravitasi (g) sebagai parameter fisis. Ada dua variabel yang diketahui yaitu h dan t dan ada dua variabel yang tidak diketahui yaitu h_0 , v_0 dan satu parameter fisis yang tidak diketahui yaitu (g). Jadi yang akan dicari atau diekstrak dari data h dan t adalah h_0 , v_0 dan g .

2. Desain Observasi

Data lapangan yang akan diukur adalah ketinggian (h) dan waktu tempuh benda jatuh adalah (t). Peralatan yang diperlukan dalam pengukuran tersebut adalah, tempat ketinggian misalnya minara yang tinggi, benda yang akan dijatuhkan (bola kelereng), meteran, dan penghitung waktu (stopwach) serta alat tulis yang diperlukan. Desain eksperimen dan tabel datanya dapat dilihat pada Gambar 1.

3. Data Observasi

Untuk mendapatkan data ketinggian dan waktu tempuh mahasiswa harus melakukan eksperimen seperti pada sketsa percobaan Gambar 1. Dalam eksperimen ini diasumsikan bahwa gesekan udara sangat kecil sehingga bisa diabaikan. Salah satu caranya untuk memperkecil hambatan udara adalah menggunakan benda yang dijatuhkan berbentuk bola yang licin misalnya kelereng. Dalam desain experiential learning ini, data yang digunakan adalah data hasil simulasi saja. Data hasil simulasi h dan t dapat dilihat pada Tabel I.

Dari Tabel 1 terdapat 20 data ketinggian (h) dan waktu tempuh (t) hasil observasi (simulasi)..

Tabel 1. Data Hasil Observasi Lapangan (Simulasi)

N	t	h	t ²	t ³	t ⁴	t.*h	t ² *h
1	5	155,305	25	125	625	776,5248	3882,624
2	4,75	141,796	22,5625	107,1719	509,0664	673,5308	3199,271
3	4,5	128,8995	20,25	91,125	410,0625	580,0476	2610,214
4	4,25	116,6155	18,0625	76,76563	326,2539	495,6157	2106,367
5	4	104,944	16	64	256	419,7758	1679,103
6	3,75	93,88496	14,0625	52,73438	197,7539	352,0686	1320,257
7	3,5	83,43847	12,25	42,875	150,0625	292,0346	1022,121
8	3,25	73,60447	10,5625	34,32813	111,5664	239,2145	777,4472

9	3	64,38297	9	27	81	193,1489	579,4467
10	2,75	55,77397	7,5625	20,79688	57,19141	153,3784	421,7907
11	2,5	47,77748	6,25	15,625	39,0625	119,4437	298,6092
12	2,25	40,39348	5,0625	11,39063	25,62891	90,88533	204,492
13	2	33,62198	4	8	16	67,24396	134,4879
14	1,75	27,46298	3,0625	5,359375	9,378906	48,06022	84,10539
15	1,5	21,91649	2,25	3,375	5,0625	32,87473	49,31209
16	1,25	16,98249	1,5625	1,953125	2,441406	21,22811	26,53514
17	1	12,66099	1	1	1	12,66099	12,66099
18	0,75	8,951993	0,5625	0,421875	0,316406	6,713995	5,035496
19	0,5	5,855495	0,25	0,125	0,0625	2,927748	1,463874
20	0,25	3,371498	0,0625	0,015625	0,003906	0,842874	0,210719
	Σ 52,5	Σ 1237,6	Σ 179,37	Σ 689,062	Σ 2822,91	Σ 4578,22	Σ 18415,5

Untuk melihat bagaimana hubungan h dan t ke duapuluh data tersebut adalah dengan membuat grafik antara h dan t . Variabel bebas adalah t sebagai absis (biasanya sumbu x) dan variabel bergantung adalah h sebagai ordinat (biasanya sumbu y). Hubungan antara h dan t dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Hubungan antara Ketinggian (h) dan Waktu (t)

4. Pemodelan Matematika

Salah satu fungsi matematika yang sangat berguna dan sangat luas digunakan dalam berbagai bidang ilmu adalah persamaan polinomial. Sehingga persamaan polinomial ini digunakan untuk melakukan perhitungan hubungan antara ketinggian h dan waktu tempuh t . Sebagai penyederhanaan maka fungsi $h(t)$ adalah polinom $p_n(t)$ yang berderajat $\leq n$. Persamaan polinomial yang dalam hal ini dapat dituliskan seperti dalam persamaan (1).

$$p_n(t) = m_0 + m_1t + m_2t^2 + \dots + m_nt^n \quad \dots\dots\dots(1)$$

Dengan menggunakan polinomial pada persamaan (1) maka dapat dimodelkan secara matematika hubungan antara ketinggian h dan waktu tempuh t . Dengan melihat grafik pada Gambar 2 dapat memberikan keyakinan kepada kita bahwa persamaan polinomialnya berderajat 2. Oleh karena itu persamaan polinomialnya kita potong sampai derajat dua atau pangkat dua saja. Model matematika yang menghubungkan antara ketinggian dan waktu tempuh benda jatuh dapat dilihat pada persamaan (2).

$$m_0 + m_1t_i + m_2t_i^2 = h_i \quad \dots\dots\dots(2)$$

Pada persamaan (2), m_0 , m_1 , m_2 adalah parameter yang tidak diketahui (unknown parameter). Jadi pada persamaan (2) di atas terdapat tiga buah model parameter. Adapaun yang berlaku sebagai data adalah nilai-nilai ketinggian (h_i) yaitu h_1, h_2, \dots, h_{20} dan waktu (t_i) yaitu t_1, t_2, \dots, t_{20} . Berdasarkan model tersebut, dapat dikatakan bahwa antara h_i dan t_i merupakan sistem persamaan simultan yang terdiri dari 20 persamaan (sesuai dengan jumlah data observasi). Persamaan simultan antara h_i dan t_i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m_0 + m_1t_1 + m_2t_1^2 &= h_1 \\ m_0 + m_1t_2 + m_2t_2^2 &= h_2 \\ m_0 + m_1t_3 + m_2t_3^2 &= h_3 \\ m_0 + m_1t_4 + m_2t_4^2 &= h_4 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ m_0 + m_1t_{20} + m_2t_{20}^2 &= h_{20} \end{aligned}$$

Semua persamaan simultan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks. Bentuk matriks dari

persamaan simultan di atas dapat dilihat pada persamaan (3).

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{20} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

Persamaan dalam bentuk matriks dapat ditulis secara ringkas seperti persamaan (4).

$$Gm = d \dots\dots\dots(4)$$

Pada persamaan (4), G disebut matriks kernel, m adalah parameter model yang dinyatakan dalam vektor kolom, dan d adalah data yang juga dinyatakan dalam vektor kolom. Selanjutnya muncul pertanyaan, bagaimana cara mendapatkan nilai m_0, m_1, m_2 pada vektor kolom m. Solusinya adalah mengalikan transpose matriks kernel (G^T) pada matriks ruas kiri dan matriks ruas kanan. Manipulasi tersebut dapat dilihat pada persamaan (5).

$$G^T Gm = G^T d \dots\dots\dots(5)$$

Bila persamaan (5) diselesaikan dengan mengoperasikan $G^T G$ dan $G^T d$ maka diperoleh persamaan matriks yang baru pada persamaan (6).

$$\begin{bmatrix} N & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum h_i \\ \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

5. Pemodelan inversi

Langkah awal yang dikerjakan dalam pemodelan inversi adalah menghitung nilai-nilai yang diperlukan dalam persamaan matriks yang terdapat pada persamaan (6) di atas. Untuk mendapatkan nilai-nilai pada matriks tersebut maka dilakukan prosesing data hasil observasi. Hasil prosesing data observasi dapat dilihat pada Tabel 1

Dari Hasil Tabel 1 maka diperoleh semua nilai yang diperlukan pada persamaan matriks di persamaan (6). Dengan mensubstitusikan nilai yang diperoleh pada Tabel 1 ke persamaan matriks di persamaan (6) maka diperoleh matriks sbb:

$$\begin{bmatrix} 20 & 52,5 & 179,375 \\ 52,5 & 179,375 & 689,0625 \\ 179,375 & 689,0625 & 2822,914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1237,639 \\ 4578,221 \\ 18415,56 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian nilai matrik yang belum diketahui adalah m_0, m_1, m_2 . Ada beberapa cara yang dapat ditempuh untuk menyelesaikan matriks di atas. Diantaranya adalah metoda Gauss Naif, Metoda Gauss Jordan, dan metoda Gauss Siedel. Dalam hal ini kita menggunakan metoda Gauss Jordan untuk dapat mengetahui parameter fisis m_0, m_1, m_2 . Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan matriks di atas menggunakan metoda Gauss Jordan dapat dilihat pada Tabel 2.

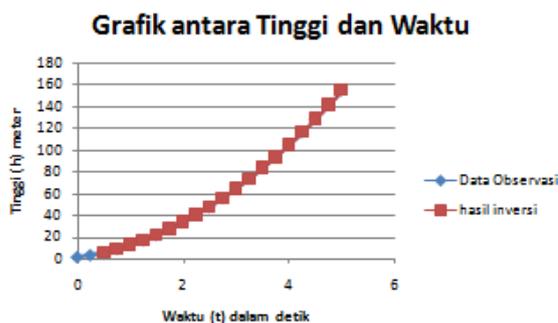
Tabel 3 Proses Metoda Gauss Jordan

20	52,5	179,375	1237,639	
52,5	179,375	689,0625	4578,221	
179,375	689,0625	2822,914	18415,56	
1	2,625	8,96875	61,88197	Baris 1/a11
0	41,5625	218,2031	1329,418	Baris 2-a21*a11
0	218,2031	1214,145	7315,476	Baris3-a31*a11
1	0	-4,8125	-22,0812	Baris1-a12*a22
0	1	5,25	31,98599	Baris2/a22
0	0	68,57813	336,0328	Baris3-a32*a22
1	0	0	1,5	Baris1-a13*a33
0	1	0	6,26099	Baris2-a23*a33
0	0	1	4,9	Baris3/a33

Dengan demikian hasil inversi matriks di atas menggunakan Gauss Jordan diperoleh parameter fisis $m_0 = 1,5, m_1 = 6,26099$, dan $m_2 = 4,9$. Untuk mendapatkan hasil pemodelan inversinya maka nilai parameter fisis yang diperoleh dari metoda Gauss Jordan disubstitusikan ke persamaan (2) dengan h sebagai fungsi waktu yaitu $h(t)$. Hasil pemodelan inversi yang diperoleh dapat dilihat pada persamaan (7).

$$h(t) = 1,5 + 6,26099t + 4,9t^2 \dots\dots\dots(7)$$

Untuk melihat lebih jelas hubungan antara h dengan t hasil inversi seperti pada persamaan (7) maka perlu dibuat grafiknya. Agar dapat dibandingkan Gambar hasil inversi dengan gambar dari data observasi maka diambil waktu (t) sama dengan waktu (t) hasil observasi. Grafik hubungan antara h dan t hasil inversi dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Hasil Pemodelan Inversi

Pada Gambar 3 dapat dilihat perbandingan antara grafik data observasi dengan grafik data hasil inversi. Hasil perbandingan antara grafik data observasi dengan grafik data hasil inversi adalah kedua kurvanya berimpit.

6. Hasil dan Pembahasan

Kembali pada persoalan pertama yaitu kita ingin mengetahui atau mengekstrak variabel dan parameter fisis yang tidak diketahui dari data ketinggian dan waktu tempuh benda jatuh (Tabel 1). Variabel dan parameter fisis yang dicari adalah ketinggian awal (h_0), kecepatan awal (v_0) dan konstanta percepatan gravitasi bumi (g). Berdasarkan konsep fisika formulasi dari benda jatuh bebas ternyata cocok dengan pemodelan matematika pada persamaan (2) di atas. Formulasi benda jatuh bebas dari konsep fisika dapat dilihat pada persamaan (8).

$$h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = h \dots\dots\dots(8)$$

Berdasarkan kesesuaian antara persamaan (2) dengan persamaan (8) maka dapat diperoleh kesesuaian bahwa $h_0 = m_0$, $v_0 = m_1$, dan $1/2g = m_2$ atau $g = 2m_2$. Oleh karena itu, dari hasil inversi pemodelan matematika pada persamaan (7) didapatkan nilai $h_0 = 1,5$ m, $v_0 = 6,26099$ m/s, dan $g = 2*(4,9) = 9,8$ m/s². Dalam simulasi ini hasil pemodelan inversi sama dengan hasil yang diperoleh dari data observasi.

7. Kesimpulan

Dengan melakukan inversi terhadap hasil pemodelan matematika dari data fisis hasil observasi maka dapat diperoleh nilai dari variabel-variabel dan parameter fisis yang tidak diketahui. Selanjutnya bahwa dari variabel dan parameter fisis tersebut yang telah diketahui maka dapat dibuat pemodelan fisis hasil dari inversi pemodelan

matematika. Dari model percobaan yang dilakukan dalam mendesain pembelajaran experiential learning ini diperoleh ketinggian awal (h_0) adalah 1,5 meter, kecepatan awal (v_0) adalah 6,28099 m/s, dan konstanta percepatan gravitasi bumi (g) adalah 9,8 m/s². Desain pembelajaran experiential learning ini dapat dijadikan acuan oleh dosen untuk mengarahkan mahasiswa memahami teori inversi yang dapat digunakan untuk menentukan parameter fisis seperti konstanta gravitasi bumi.

8. Pustaka

- (1) Kolb, D.A. (1984): Experiential learning: xperience as the source of learning and development, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- (2) Grandis, H. (2009): Pengantar Pemodelan Inversi Geofisika, HAGI
- (3) Meju, A Max. (1994): Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice, Society of Exploration Geophysicists (SEG)
- (4) Supriyanto, (2007), Memahami Teori Inversi, Universitas Indonesia

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih Kepada Rektor UNHAS dan Jajarannya yang telah memberikan biaya untuk mempersentasikan makalah ini pada Semiar Nasional Fisika (SNF) di UNJ Jakarta.

