TEORI GAUGE DAN GRUP SIMETRI INTERNAL

T. B. Prayitno

Jurusan Fisika, Universitas Negeri Jakarta
Jl. Pemuda Rawamangun No. 10 Jakarta Timur
trunk_002@yahoo.com

Abstrak

Pada makalah ini telah dikaji ulang mengenai konsep dasar transformasi gauge dan kaitannya dengan teori grup. Gagasan mengenai konsep teori gauge yang pertama kali diajukan oleh Hermann Weyl pada tahun 1919 ini mengambil analogi yang sama dengan gagasan yang diajukan oleh Albert Einstein dengan memperkenalkan besaran ”connection” dalam teori relativitas umum. Besaran ini digunakan oleh Einstein untuk mendefinisikan kerangka koordinat lokal dengan menganggap bahwa medan gravitasi bersifat merata/uniform. Selain itu, Gagasan ini pada dasarnya diajukan untuk menyatakan hubungan antara satu pengamat dengan pengamat lainnya dalam meninjau sistem fisika sebagai upaya untuk memperluas ketidak ubahan hukum fisika yang dilihat oleh pengamat mana pun juga. Namun demikian, ”connection” yang pertama kali diajukan oleh Weyl ternyata merupakan simetri dari persamaan Maxwell di dalam teori elektromagnetik mengenai kebebasan memilih potensial skalar dan potensial vektor. Selain itu, Weyl juga menunjukkan bahwa simetri tersebut berkaitan dengan simetri dari suatu grup simetri internal yang tergolong grup Lie, yaitu grup U(1).

Keywords: *Gauge Invariance, Grup simetri internal*

Abstract

In this paper we have reviewed the basic concept of the gauge transformation and its relation with the group theory. The idea of the gauge theory was initially proposed by Hermann Weyl in 1919 by taking the same analogy with the idea of Albert Einstein by introducing the new quantity namely connection in general relativity. This quantity was used by Einstein in order to define the local coordinate by considering that gravitational field is uniform. In addition, this idea is actually proposed to relate the observer and other observers for extension that the law of physics still hold. However, the connection which was initially proposed by Weyl is also a symmetry of Maxwell equations in the electromagnetic theory in the case of freedom to choose both scalar potential and vector potential. Moreover, Weyl also proved that the symmetry is related by the group of internal symmetry which is Lie group namely U(1) group.

Keywords: *Gauge Invariance, Group of internal symmetry*

1. Pendahuluan

Istilah simetri gauge yang mengilhami Hermann Weyl [1] untuk mengajukan teori gaugenya berawal dari konsep simetri yang diajukan oleh Albert Einstein dalam teori relativitas khusus di tahun 1905, lalu dilanjutkan dengan teori relativitas umum beberapa tahun setelah itu. Teori relativitas khusus menekankan bahwa semua hukum fisika berlaku sama apabila diamati oleh semua pengamat inersial. Di samping itu, teori ini juga dianggap sebagai pengganti teori mekanika klasik Newton yang digunakan untuk mengkaji gerak benda yang mempunyai kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Keterkaitan antara pengamat yang satu dengan yang lainnya dihubungkan melalui transformasi Lorentz yang hanya bergantung pada kecepatan relatif pengamat dan tidak bergantung pada posisi pengamat berada. Simetri yang demikian dinamakan simetri global atau yang lebih dikenal sebagai simetri grup Lorentz dalam teori relativitas khusus.

Beberapa tahun kemudian, Einstein mengajukan teori relativitas umumnya yang pada dasarnya untuk membuat pernyataan umum bahwa semua hukum fisika haruslah berlaku sama untuk semua pengamat, baik pengamat inersial maupun non inersial. Namun demikian, perumusan matematika tersebut tidaklah mudah mengingat konsep mengenai percepatan benda pada suatu medan gravitasi haruslah dipertimbangkan. Hal demikian terjadi karena secara umum percepatan gravitasi pada semua titik tidak sama melainkan bergantung pada jarak dari sumber gravitasi sesuai dengan perumusan gaya gravitasi yang diajukan pertama kali oleh Newton. Dengan demikian, Einstein menyadari bahwa keterkaitan antara pengamat yang satu dengan yang lainnya dalam suatu sistem yang dipercepat, dalam hal ini adalah medan gravitasi, haruslah diungkapkan melalui kerangka lokal yang menganggap bahwa dalam kerangka tersebut medan gravitasi dianggap merata [2]. Untuk mengatasinya, Einstein memperkenalkan sebuah besaran "connection" yang menggambarkan hubungan antara pengamat yang satu dengan yang lainnya dalam medan gravitasi. Simetri dari teori di atas dinamakan simetri lokal dalam teori relativitas umum karena keterkaitan antara pengamat yang satu dengan yang lainnya bergantung pada posisi pengamat masing-masing. Secara geometri, teori relativitas khusus digambarkan melalui geometri ruang waktu datar/flat sedangkan teori relativitas umum digambarkan melalui ruang waktu lengkung. Selain itu, kedua simetri di atas dikenal sebagai simetri eksternal dalam teori grup.

Pada tahun 1919 sekelompok ilmuwan yang dipimpin oleh Sir Arthur Eddington tertarik untuk membuktikan kebenaran teori relativitas umum. Salah satu dugaan yang dikemukakan oleh Einstein adalah pembelokan cahaya bintang yang merambat dekat dengan matahari. Pada tahun itu, Eddington memberikan hasil pengamatannya bahwa cahaya bintang yang melalui medan gravitasi matahari memang membelok seperti yang diramalkan oleh Einstein [3]. Hasil pengamatan tersebut dibuktikan di Afrika ketika terjadinya gerhana matahari total. Hasil pembuktian di atas mengilhami Weyl untuk mengajukan teorinya. Pada tahun itu, hanya terdapat dua teori fundamental yang dikenal yaitu gravitasi dan elektromagnetik. Hal yang menarik bagi Weyl adalah bentuk matematika yang mirip antara gaya gravitasi Newton dan gaya Coulomb.

Oleh sebab itu, Weyl memberi dugaan konsep adanya "connection" yang berlaku di dalam teori relativitas umum seharusnya dapat berlaku juga di dalam teori elektromagnetik walaupun dengan pandangan yang berbeda. Dugaan Weyl ini dituangkan dalam konsep simetri internal dengan memperkenalkan suatu ruang internal berdasarkan analogi teori relativitas umum. Weyl beranggapan bahwa "connection" harus muncul apabila ruang internal tersebut melengkung dengan mengajukan suatu konsep bahwa suatu besaran vektor yang menggambarkan besaran fisis haruslah mempunyai panjang yang tetap dan tidak bergantung pada posisi di dalam ruang dan waktu. Berdasarkan anggapan ini, Weyl berhasil membuktikan bahwa elektromagnetik merupakan salah satu wujud dari simetri internal. Teori yang diajukan Weyl ini menjadi cikal bakal terbentuknya teori gauge modern terutama yang berkaitan dengan fisika partikel, seperti interaksi lemah dan kuat, yang ditemukan beberapa tahun kemudian setelah Weyl mengajukan teorinya.

Di dalam makalah ini akan dibahas pertama kali bentuk matematika yang diajukan oleh Weyl yang berkaitan dengan teori gauge dalam elektromagnetik di dalam lingkup mekanika kuantum. Bentuk matematika tersebut memberi interpretasi bahwa interaksi elektromagnetik dari partikel bermuatan merupakan wujud keberadaan teori gauge lokal. Selain itu, akan ditunjukkan pula bahwa teori gauge di atas dapat dikaitkan dengan grup internal yang pada dasarnya merupakan grup Lie. Di samping itu, akan dibahas pula teori simetri gauge umum yang merupakan perluasan dari simeri gauge yang diajukan oleh Weyl. Menurut sejarah, simetri gauge tersebut berhasil menyingkap dua interaksi fundamental di alam lainnya, yaitu interaksi lemah dan interaksi kuat [4]. Perkembangan selanjutnya adalah menggabungkan keempat interaksi fundamental di alam melalui konsep teori gauge, namun sayangnya gravitasi belum dapat digabungkan dengan ketiga interkasi lainnya.

2. Transformasi Gauge Lokal dalam Mekanika Kuantum

Perkembangan mekanika kuantum yang bersamaan dengan lahirnya teori gauge ini memunculkan suatu interpretasi baru. Interpretasi tersebut muncul dengan meninjau transformasi rotasi pada fungsi gelombang dalam mekanika kuantum yang secara umum mempunyai bentuk[1]

$$\psi' = e^{iq\theta(\vec{r},t)}\psi, \qquad (1)$$

dengan variabel θ merupakan fungsi ruang dan waktu. Pada persamaan (1), kita langsung dapat menyimpulkan bahwa

---

[1] konstanta q secara umum dikenal sebagai konstanta kopling (dalam elektromagnetik dikenal sebagai muatan listrik)

$$|\psi'|^2 = |\psi|^2 \tag{2}$$

yang menunjukkan bahwa amplitudo probabilitas tidak berubah. Dari hasil di atas, Weyl menduga bahwa fasa di atas, dalam hal ini θ, dapat dianggap sebagai variabel lokal [5]. Dengan demikian, Weyl menyimpulkan bahwa untuk kasus ini, transformasi gauge lokal dapat dituliskan sebagai transformasi fasa atau transformasi rotasi dalam ruang internal[2]. Selain itu, Weyl juga memberi argumen bahwa akan terdapat suatu "connection" yang menyebabkan interpretasi di atas tidak berubah.

Pada bagian ini akan dikaji mengenai perumusan persamaan Schrödinger yang invarian/tidak berubah bentuk terhadap transformasi gauge lokal dengan menambahkan suatu "connection" sesuai dengan dugaan yang diajukan oleh Weyl. Kita meninjau dahulu persamaan Schrödinger non relativistik di dalam mekanika kuantum

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{3}$$

langkah selanjutnya, kita terapkan transformasi gauge lokal seperti yang tertulis pada persamaan (1). Dengan mudah dibuktikan bahwa persamaan (3) akan berubah bentuk yang terlihat dari hubungan berikut[3]

$$\nabla\left(e^{iq\theta}\psi\right) \neq e^{iq\theta}\nabla\psi\ , \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{iq\theta}\psi\right) \neq e^{iq\theta}\frac{\partial\psi}{\partial t}\ . \tag{5}$$

Solusi untuk mengatasinya adalah memperluas bentuk operator differensial yang di dalamnya terkandung "connection" yang didefinisikan sebagai berikut[4]

$$\nabla \rightarrow \vec{D} \equiv \nabla - iq\vec{A}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi, \tag{7}$$

dengan $\vec{A}$ dan ϕ adalah "connection". Selain itu, agar persamaan Schrödinger invarian terhadap transformasi gauge lokal, maka diterapkan pula dua syarat batas transformasi yang diambil berdasarkan analogi persamaan (4) dan (5) sebagai berikut

$$\vec{D}'\left(e^{iq\theta}\psi\right) = e^{iq\theta}\vec{D}\psi, \tag{8}$$

$$D_t'\left(e^{iq\theta}\psi\right) = e^{iq\theta}D_t\psi. \tag{9}$$

Apabila transformasi gauge lokal diterapkan pada persamaan (8) dan (9), maka kita mendapatkan transformasi untuk "connection" yang memenuhi transformasi

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\theta, \tag{10}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{11}$$

Persamaan (10) dan (11) adalah transformasi gauge di dalam elektromagnetik yang menjamin bahwa medan listrik dan magnet tidak berubah apabila kedua transformasi di atas diterapkan [6]. Dengan demikian, persamaan Schrödinger yang invarian terhadap transformasi gauge lokal mempunyai bentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - iq\vec{A}\right)^2\psi + V\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi\right)\psi, \tag{12}$$

dengan transformasi simultan

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta}\psi, \tag{13}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\theta, \tag{14}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{15}$$

Oleh sebab itu, Weyl memberi tafsiran bahwa potensial skalar dan vektor (ϕ, $\vec{A}$) pada teori elektromagnetik merupakan "connection" atau yang lebih dikenal juga sebagai potensial gauge. Interpretasi lain yang dapat diambil adalah bahwa keberadaan interaksi medan elektromagnetik dengan partikel bermuatan yang digambarkan melalui persamaan (12) adalah wujud adanya kesimetrian gauge.

3. Transformasi Gauge Lokal Umum dan Grup Simetri Internalnya

Pada bagian ini, akan diperluas bentuk umum transformasi gauge lokal dan kaitannya dengan grup simetri internal yang bersangkutan. Berdasarkan kajian sebelumnya fasa dari fungsi gelombang partikel dapat dianggap sebagai derajat

[2] apabila θ tidak bergantung pada ruang dan waktu, transformasinya dikenal sebagai transformasi gauge global.
[3] transformasi gauge global tidak mengubah bentuk persamaan Schrödinger

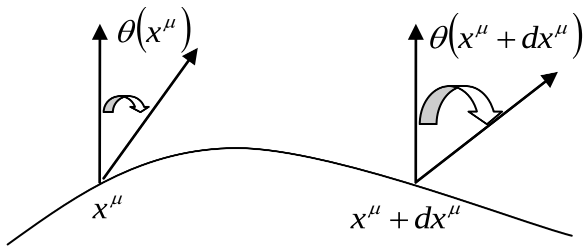
kebebasan yang baru yang bergantung pada posisi di ruang dan waktu. Dalam ruang internal, fasa tersebut merupakan sudut rotasi dari suatu partikel yang direpresentasikan melalui sebuah fungsi gelombang. Perumusan transformasi gauge lokal umum ini pada awalnya dilatarbelakangi melalui ide yang diajukan oleh Yukawa pada tahun 1935 dalam upaya untuk menjelaskan interaksi lemah (lebih dikenal sebagai interaksi nuklir). Menurut Yukawa, gaya nuklir disebabkan oleh adanya partikel perantara yang mirip foton seperti di dalam teori elektromagnetik, namun mempunyai massa mengingat interaksi tersebut mempunyai jangkuan yang sangat pendek. Usulan ini berawal dari gagasan Heisenberg beberapa tahun sebelumnya bahwa proton dan neutron dapat dianggap sebagai keadaan ”up” atau ”down” pada suatu spin isotopic abstrak (isospin) yang mirip seperti keadaan spin pada elektron. Namun demikian, usaha ini baru menemui keberhasilan melalui usaha C. N. Yang dan R. Mills pada tahun 1954 [7] yang mempostulatkan bahwa grup isospin tersebut adalah SU(2)[5].

Untuk memperluas bentuk transformasi gauge secara umum, dipostulatkan bahwa setiap partikel atau sistem yang berada di dalam suatu daerah yang terlokalisasi dan membawa suatu bilangan kuantum internal dianggap mempunyai arah di dalam ruang internal. Arah tersebut dapat dipilih sembarang pada setiap titik di ruang waktu dan untuk membandingkan arah yang satu dengan arah yang lainnya dalam ruang internal pada dua titik yang berbeda, x^{μ} dan $x^{\mu}+dx^{\mu}$, dibutuhkan suatu ”connection” yang menyatakan seberapa besar perbedaan arah pada kedua titik tersebut. Di samping itu, ”connection” tersebut harus juga dapat menghubungkan semua arah yang mungkin di dalam ruang internal sehingga semua arah yang mungkin tersebut haruslah berupa rotasi di dalam ruang internal. Menurut teori grup, semua elemen transformasi rotasi akan membentuk suatu grup simetri.

Sebagai permulaan analisis, kita meninjau terlebih dahulu suatu transformasi simetri lokal untuk sembarang grup[6] [2]

$$T\left(x^{\mu}\right)\psi = \exp\left(iq\sum_{k}\theta^{k}\left(x^{\mu}\right)F_{k}\right)\psi \ , \qquad (16)$$

dengan k dan μ masing-masing menyatakan indeks internal dan eksternal sedangkan parameter transformasi lokal itu sendiri dinyatakan oleh θ^{k}. Indeks internal merupakan indeks yang menyatakan jumlah generator yang dimiliki oleh suatu grup simetri internal ($k=1,2,...$)/menyatakan dimensi ruang internal sedangkan indeks eksternal menyatakan dimensi ruang waktu ($\mu=0,1,2,3$)[7]. Di samping itu, menurut teori grup, F_k merupakan generator dari suatu grup simetri. Secara kualitatif, transformasi pada persamaan (16) dapat dibayangkan sebagai perpindahan suatu partikel uji dari titik x^{μ} menuju titik $x^{\mu}+dx^{\mu}$ dalam suatu ruang internal yang melengkung [2].



***Gambar 1** : rotasi sudut yang berubah dalam ruang internal akibat partikel yang berpindah dalam ruang waktu.*

Melalui gambaran di atas, maka suatu fungsi gelombang yang menggambarkan partikel haruslah diuraikan dalam bagian eksternal dan internal, yang dapat ditulis [2]

$$\psi\left(x^{\mu}\right)=\sum_{k}u_{k}\psi_{k}\left(x^{\mu}\right). \qquad (17)$$

Pada persamaan di atas, u_k merupakan vektor basis di dalam ruang internal sedangkan ψ_k merupakan komponen dari ψ dalam basis u_k. Dengan perkataan lain, u_k merupakan bagian internal sedangkan ψ_k merupakan bagian eksternal. Apabila suatu partikel berpindah dari titik x^{μ} menuju titik $x^{\mu}+dx^{\mu}$ dalam ruang internal, maka fungsi gelombang partikel mengalami perubahan sebesar [2]

[5] Ini adalah awal dari teori gauge modern mengingat grup tersebut bersifat non -Abelian.
[6] Tanda negatif (-) atau positif (+) pada bagian eksponensial bergantung kepada referensi.

[7] penjelasan lengkap mengenai indeks tersebut tedapat pada lampiran.

$$d\psi\left(x^\mu\right) = d\left(\sum_k u_k \psi_k\left(x^\mu\right)\right)$$
$$= \sum_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x^\mu} dx^\mu u_k + \psi_k du_k\right). \quad (18)$$

Pada persamaan (18), du_k muncul karena adanya "connection" yang pada dasarnya diidentikan sebagai potensial luar dalam ruang internal.

Untuk menghitung du_k, kita meninjau dahulu operator transformasi rotasi infinitesimal berikut [2]

$$T\left(dx^\mu\right) = \exp\left(iq\sum_k d\theta^k F_k\right)$$
$$= \exp\left(iq\sum_k \frac{\partial \theta^k}{\partial x^\mu} dx^\mu F_k\right). \quad (19)$$

Langkah selanjutnya, kita merotasikan basis internal ini melalui operator transformasi di atas yang secara umum mempunyai bentuk

$$T\left(dx^\mu\right)u_k = u_k + du_k\,. \quad (20)$$

Apabila operator $T\left(dx^\mu\right)$ diuraikan sampai orde-1 pada ruas kanan persamaan (19), lalu disubstitusikan pada ruas kiri persamaan (20) , maka melalui aljabar matematika dapat dibuktikan bahwa basis infinitesimalnya mempunyai persamaan [2]

$$du_a = iq\sum_k \frac{\partial \theta^k}{\partial x^\mu} dx^\mu \left(F_k\right)_{ab} u_b\,. \quad (21)$$

Melalui persamaan (21) inilah didefiniskan sebuah "connection" yang dituliskan sebagai berikut [2]

$$\left(A_\mu\right)_{ab} = \sum_k \frac{\partial \theta^k}{\partial x^\mu}\left(F_k\right)_{ab}. \quad (22)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (21) ke persamaan (18), maka didapat

$$d\psi = \sum_b \left(D_\mu \psi_b\right) dx^\mu u_b\,, \quad (23)$$

dengan

$$D_\mu \psi_b = \sum_k \left(\delta_{kb}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + iq\left(A_\mu\right)_{kb}\right)\psi_k\,. \quad (24)$$

Dalam beberapa referensi, suku D_μ dikenal sebagai operator turunan kovarian. Untuk grup U(1), hanya terdapat satu generator sehingga ruang internalnya berubah menjadi satu dimensi sehingga persamaan (24) tereduksi menjadi

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\psi\,. \quad (25)$$

Untuk melihat kaitan antara grup U(1) dengan elektromagnetik, kita tinjau dahulu syarat yang diharapkan dari transformasi gauge menurut Weyl. Menurut Weyl, transformasi dari suatu fungsi gelombang harus mempertahankan arti fisis (dalam hal ini adalah rapat probababilitas) atau secara matematis dituliskan

$$\left|\psi'\right|^2 = \left|\psi\right|^2. \quad (26)$$

Dengan demikian, Weyl juga memberi usulan tambahan bahwa transformasi dari turunan kovarian juga harus tidak berubah [2]

$$\left|D'_\mu \psi'\right|^2 = \left|D_\mu \psi\right|^2, \quad (27)$$

sehingga aturan transformasi dari turunan kovarian haruslah mempunyai bentuk yang sama dengan transformasi fungsi gelombang yang dituliskan pada persamaan (1)

$$D'_\mu \psi' = T\left(D_\mu \psi\right), \quad (28)$$

dengan definisi transformasi untuk turunan kovarian berbentuk

$$D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu\,. \quad (29)$$

Persamaan (29) memberikan informasi kepada kita bahwa "connection" mempunyai suatu aturan transformasi agar dapat mempertahankan arti fisis. Dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke persamaan (28) akan didapatkan bentuk transformasi "connection" berbentuk

$$A'_\mu = TA_\mu T^{-1} - \frac{1}{iq}\left(\partial_\mu T\right)T^{-1}. \quad (30)$$

Untuk grup U(1), elemen grup yang bersangkutan dapat dituliskan sebagai bentuk khusus dari operator T (jumlah parameternya adalah satu dengan dimensi matriks 1x1) seperti yang ditunjukkan pada persamaan (16)

$$T = \exp(iq\theta). \tag{31}$$

Menurut aturan transformasi di dalam mekanika kuantum, bentuk operator yang dapat mentransformasikan fungsi gelombang ψ, hanyalah operator yang bersifat Hermitian sehingga

$$T^{-1} = T^{\dagger}, \tag{32}$$

dengan † menunjukkan transpose konjugat. Dengan demikian, apabila persamaan (31) disubstitusikan ke persamaan (30) diikuti dengan aturan yang ditentukan pada persamaan (32), maka akan didapat bentuk transformasi untuk ”connection” yang mempunyai simetri grup U(1)

$$A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\theta . \tag{33}$$

Persamaan transformasi (33) merupakan transformasi gauge untuk elektromagnetik pada persamaan (10) dan (11) yang dituliskan dalam bentuk tensor.

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah ditunjukkan kaitan antara transformasi gauge pada teori elektromagnetik dan teori grup U(1). Transformasi gauge pada elektromagnetik tersebut tidak lain adalah transformasi potensial skalar dan potensial vektor yang dapat dipilih sembarang asalkan tidak mengubah bentuk medan listrik dan magnet. Selain itu, berdasarkan kajian teori grup, kedua potensial elektromagnetik tersebut dianggap sebagai ”connection” atau potensial luar di dalam ruang internal karena adanya perpindahan partikel dari suatu titik ke titik lain dalam ruang waktu.

Bentuk ”connection” sendiri bergantung dari jenis grup internalnya. Untuk grup dengan dimensi lebih dari satu buah (misalnya SU(2)) dapat ditunjukkan bahwa ”connection”nya secara umum bersifat non-Abelian. Hal ini disebabkan adanya kebergantungan ”connection” dengan generator dari grup yang bersangkutan. Untuk grup U(1) sendiri ”connection” bersifat Abelian mengingat generator pada grup tersebut berjumlah satu buah.

Ucapan Terima Kasih

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada rekan-rekan dosen di jurusan fisika UNJ atas terwujudnya makalah ini.

Lampiran

A. Teori Grup

Secara umum, sebuah grup G merupakan himpunan yang dilengkapi dengan sebuah operasi perkalian grup[8] ($*$) yang memenuhi syarat-syarat berikut [8]

1. sifat ketertutupan/klosur
   $a,b \in G \rightarrow a*b \in G$
2. sifat asosiatif
   $a,b,c \in G \rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$
3. terdapat elemen satuan/identitas $e \in G$ yang memenuhi aturan
   $e*a = a*e = a$, $\forall \ a \in G$
5. untuk setiap $a \in G$, akan terdapat elemen invers $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku
   $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

Berdasarkan sifat perkalian dari elemen-elemen grup, grup terbagi menjadi dua bagian
1. grup Abelian/komutatif
   $a*b = b*a$, $\forall \ a,b \in G$
2. grup non-Abelian
   $a*b \neq b*a$, $\forall \ a,b \in G$

Di samping itu, berdasarkan jumlah elemennya, grup dibagi lagi menjadi dua bagian, yaitu grup kontinu (jumlah elemennya tak hingga buah) dan grup diskrit (jumlah elemennya berhingga).

Definisi :
Grup Lie merupakan grup kontinu yang setiap elemennya $g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ merupakan fungsi analitik dari sejumlah parameter $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ yang operasi perkaliannya berupa hubungan komutasi/komutator $[\ ]$[9].

Teorema Lie :
setiap elemen grup Lie $g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ dapat dihasilkan melalui elemen grup infinitesimal melalui operasi eksponensial

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = \exp\left(i\sum_a \alpha_a T_a\right), \tag{34}$$

dengan indeks a menyatakan jumlah parameter dari grup yang bersangkutan. T_a merupakan generator dari suatu grup Lie[10] yang memenuhi aljabar Lie berikut [9]

---

[8] Operasi perkalian grup dapat berupa penjumlahan, perkalian, atau operasi lainnya
[9] Hubungan ini dikenal sebagai aljabar Lie
[10] Jumlah parameter sama dengan jumlah generator

$$[T_a, T_b] \equiv T_a T_b - T_b T_a . \qquad (35)$$

Grup uniter merupakan grup yang elemen-elemennya berupa matriks uniter

$$U(n) = \{g \in U(n) | g^{-1} g = g g^{-1} = e\}. \qquad (36)$$

Jumlah parameter grup uniter secara umum dapat dirumuskan sebagai n^2, dengan n merupakan dimensi dari grup yang bersangkutan. Dengan demikian, grup U(1) hanya mempunyai satu generator dan tergolong grup Abelian.

B. Notasi relativistik

Menurut teori relativitas khusus, dua kejadian pada dua titik di ruang waktu yang berbeda, (x, y, z, t) dan $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, dapat dihubungkan melalui sebuah interval di antara dua titik tersebut[11]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \qquad (37)$$

dengan c adalah kecepatan cahaya. Berdasarkan persamaan (37) dapat didefinisikan tensor kontravarian (x^μ) dan tensor kovarian (x_μ), dengan indeks μ adalah indeks ruang waktu $(\mu = 0,1,2,3)$. Dalam hal ini koordinat ruang waktu didefinisikan sebagai vektor kontravarian $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Di samping itu, kita juga dapat mendefinisikan tensor metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (38)$$

dan invers matriks yang bersangkutan

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Tensor metrik beserta inversnya berfungsi untuk menaikkan atau menurunkan indeks pada setiap tensor

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu$$
$$= g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3 \quad (40)$$

Dari persamaan (40) terlihat bahwa untuk vektor kovarian dapat dituliskan $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$.

Untuk operator differensial, aturan penulisan tensornya sebagai berikut

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \qquad (41)$$

dan inversnya

$$\partial^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \qquad (42)$$

Di dalam teori elektromagnetik, potensial skalar dan vektor dapat dituliskan di dalam notasi relativistik

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right), \qquad (43)$$

dan inversnya

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z \right). \qquad (44)$$

Daftar Acuan

[1]. H. Weyl, *Ann. Physik* 59, 101 (1919).
[2]. K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, 1st ed., Singapore: World Scientific, 1983, pp. 5-14.
[3]. R. D'Inverno, *Introducing Einsteins's Relativity*, 1st ed., New York: Oxford University Press Inc., 1992, pp. 68-87, 199-201.
[4]. G. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, 1st ed., Michigan : Westview Press, 1993, pp. 43-52.
[5]. H. Weyl, *Zeit. Physik* 56,330 (1929).
[6]. D. J. Griffiths, *Introduction To Electrodynamics*, 2nd ed., New Jersey: Prentice-Hall, 1999, pp. 416-421.
[7]. C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev*. 96, 191 (1954).
[8]. H. F. Jones, *Groups, Representations, and Phyics*, 2nd ed., London : IOP Publishing Ltd, 1998, pp. 1-4.
[9]. H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, 2nd ed., Michigan : Westview Press, 1999, pp. 43-54.
[10]. L. H. Ryder, Quantum Field Theory, 2nd ed., Cambridge : Cambridge University Press, 1998, pp. 25-27.

[11] Bentuk interval ini menyatakan geometri ruang waktu Minkowski