Spektra: Jurnal Fisika dan Aplikasinya
http://doi.org/10.21009/SPEKTRA

Volume 3 Issue 2,
August 2018

p-ISSN: 2541-3384
e-ISSN: 2541-3392

DOI: doi.org/10.21009/SPEKTRA.032.07

Received: 26 February 2018
Revised: 19 July 2018
Accepted: 21 August 2018
Published: 30 August 2018

TWO STATIC FLUID DARK MATTER MODEL WITH ADDITIONAL COSMOLOGICAL CONSTANT

Izrul Supriyadi[1,a)], Widya Sawitar[2,c)], Esmar Budi[1,b)], Riser Fahdiran[1,d)]

[1]*Program Studi Fisika FMIPA UNJ, Jl. Pemuda No 10, Jakarta 13220*
[2]*Planetarium dan Observatorium Jakarta, Jl. Cikini Raya 73, Jakarta 10330*

Email: [a)]izruleinstein340@gmail.com,[b)]esmarbudi@unj.ac.id,[c)]ron_aldebaran@yahoo.com
[d)]riser-fahdiran@unj.ac.id

Abstrak

Pada persamaan medan gravitasi Einstein terdapat konstanta kosmologi sebagai konstanta alam yang menjelaskan model mengembangnya alam semesta dan yang paling dominan terdapat di jagad raya ini adalah dalam bentuk energi gelap (dark energy). Kami meninjau model objek dua fluida tidak terkopel, seperti layaknya materi gelap (dark matter) atau bintang yang memiliki karakteristik tensor energi-momentum dan kecepatan-4 nya yang berbeda serta bersifat anisotropik, kemudian disatukan sebagai model dua fluida untuk ditinjau persamaan TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) dan persamaan geodesiknya dalam menunjukkan sifat gerak dan model dua fluida tersebut. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa model ini dapat menjelaskan persamaan potensial efektif dengan tambahan konstanta kosmologi sebagai karakteristik gerak dan kecepatan tangensial partikel uji dalam orbit lingkaran stabil.

Kata-kata kunci: konstanta kosmologi, anisotropik, potensial efektif, kecepatan tangensial.

Abstract

In Einstein's gravitational field equation has been found the cosmological constant as the natural constant that describes the universe's expansion model and the most dominant in the universe is the dark energy form. We review the two objects of fluid models are not coupled, like dark matter or stars which has the different characteristic energy-momentum tensor and four velocities and anisotropic tend, then combined as two-fluid models for TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) equation and the geodesic equation to characterize the movement and the two fluid models. The calculation result shows that this model can explain the potential equation with an addition of an effective cosmological constant as the movement characteristic and tangential velocity of a tested particle in a stable circular orbit.

Keywords: cosmological constant, anisotropic, effective potential, tangential velocity.

PENDAHULUAN

Observasi alam semesta yang kian berkembang pesat hingga sekarang, membuat para ilmuwan dapat menggagas teori model objek apapun di alam semesta. Model statis dapat diprediksi berdasarkan persamaan medan gravitasi Einstein melalui cara meninjau dua fluida statis yang memiliki perbedaan pada parameter termodinamika dan kecepatan-4 (kecepatan pada masing–masing dimensi atau koordinat) di setiap objek statis tersebut dengan mengasumsikannya sebagai materi gelap [1]. Model dua fluida tersebut dapat dideskripsikan sebagai fluida–tercampur anisotropik di mana ada perbedaan tekanan di sekitar permukaan objek fluida yakni tekanan radial dan tekanan tangensial. Dengan kondisi yang seperti itu, memungkinkan model materi gelap dua fluida statis tersebut mengikuti geometri statik simetri bola yang berhasil dijelaskan oleh metrik Schwarzschild dalam mempelajari geometri objek dalam koordinat bola (ruang waktu dijadikan dalam satu metrik) [2].

Pencarian akan model objek fluida statis membuat penelitian ini ingin mempelajari lebih lanjut mengenai keadaan anisotropiknya jika ditambahkan konstanta kosmologi pada persamaan medan gravitasi Einstein yang memiliki hubungan erat dengan tensor energi–momentum yang dihasilkannya. Penambahan konstanta kosmologi pada penelitian ini dimulai dari persamaan medan gravitasi Einstein untuk melihat bentuk tensor energi–momentum yang dihasilkan berdasarkan objek dua fluida statis yang memiliki kecepatan–4 yang berbeda. Menggunakan metrik Schwarzschild sebagai asumsi bahwa model dua fluida statis ini memiliki geometri simetri bola terhadap ruang dan waktu sehingga ruas kiri pada persamaan medan gravitasi Einstein menjelaskan kelengkungan ruang di sekitar objek [3]. Kemudian akan didapat persamaan TOV untuk menjelaskan sifat dan kemungkinan yang akan terjadi terhadap kondisi anisotropik objek dengan parameter kecepatan tangensial partikel uji dalam orbit lingkaran stabil yang berbanding lurus dengan kerapatan fluida. Asumsikan kembali bahwa dua fluida ini memiliki kerapatan yang sama sehingga kecepatan tangensial keduanya akan didapat [1]. Tidak hanya itu, persamaan geodesik dalam mengkarakteristik sifat gerak model dua fluida tersebut akan didapat dan menunjukkan bahwa model ini dapat menjelaskan persamaan potensial efektif dengan tambahan konstanta kosmologi sebagai karakteristik gerak partikel uji di sekitar objek tersebut [4].

METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini digunakan tensor energi– momentum sebagai model dua fluida tercampur anisotropik

$$T^{\mu\nu} = (\rho_1 + P_1)U^\mu U^\nu - P_1 g^{\mu\nu} + (\rho_2 + P_2)W^\mu W^\nu - P_2 g^{\mu\nu} \tag{1}$$

dengan $U^\mu U_\mu = 1$ dan $W^\mu W_\mu = 1$.

Dengan menggunakan konvensi $c = G = 1$, kami gunakan metrik Schwarzschild

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2}$$

dengan $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$.

Persamaan medan gravitasi Einstein dengan tambahan konstanta kosmologi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3}$$

dengan menggunakan aturan tensor dan kalkulus, maka didapatkan persamaan TOV dan kecepatan tangensial partikel uji dalam orbit lingkaran stabil.

Dalam menentukan model sifat gerak dua fluida ini digunakan persamaan geodesik

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{4}$$

di mana $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ disebut sebagai simbol Christoffel.

Di sini digunakan *timelike killing vectors* sebagai bentuk konservasi energi

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = konstan \tag{5}$$

dan besar kekekalan momentum angular dengan asumsi $\theta = \pi/2$ di mana

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2\frac{d\phi}{d\lambda} \tag{6}$$

sehingga didapatkan persamaan energi dan potensial efektif model sistem partikel

  p-ISSN: 2541-3384
e-ISSN: 2541-3392

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \varepsilon_0 \tag{7}$$

dan kemudian diperoleh potensial efektif $V(r)$ dengan tambahan suku konstanta kosmologi ini [4].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil yang didapat dari penelitian ini berawal dari bentuk tensor energi – momentum dua fluida tercampur anisotropik yang sesuai dengan persamaan (1) dengan asumsi transformasi kecepatan–4 kami pilih [5, 6]

$$\begin{aligned} U^{\mu} \to U^{*\mu} &= U^{\mu}\cos\alpha + \sqrt{\frac{\rho_2 + P_2}{\rho_1 + P_1}}W^{\mu}\sin\alpha \\ W^{\mu} \to W^{*\mu} &= W^{\mu}\cos\alpha - \sqrt{\frac{\rho_1 + P_1}{\rho_2 + P_2}}U^{\mu}\sin\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

yang merepresentasikan sebuah rotasi pada vektor kecepatan-4 dalam koordinat $\left(U^{\mu}, W^{\mu}\right)$ di mana persamaan (1) adalah invarian, sehingga $T^{\mu\nu}(U,W) = T^{\mu\nu}(U^*,W^*)$ dan dipilih U^* dan W^* menjadi *timelike* dan yang lainnya dijadikan *spacelike*.

Gunakan kondisi $U^{*\mu} W^*_{\mu} = 0$ pada persamaan (8) maka didapatkan sudut rotasi

$$\tan 2\alpha = 2\frac{\sqrt{(\rho_1 + P_1)(\rho_2 + P_2)}}{(\rho_1 + P_1) - (\rho_2 + P_2)}U^{\mu}W_{\mu} \tag{9}$$

Selanjutnya [1], definisikan besaran berikut

$$V^{\mu} = \frac{U^{*\mu}}{\sqrt{U^{*\alpha}\, U^*_{\alpha}}} \quad \text{dan} \quad \chi^{\mu} = \frac{W^{*\mu}}{\sqrt{-W^{*\alpha}\, W^*_{\alpha}}}$$

$$\varepsilon = T^{\mu\nu}V_{\mu}V_{\nu} = (\rho_1 + P_1)U^{*\alpha}\, U^*_{\alpha} - (P_1 + P_2)$$

$$\Psi = T^{\mu\nu}\chi_{\mu}\chi_{\nu} = (P_1 + P_2) - (\rho_2 + P_2)W^{*\alpha}\, W^*_{\alpha}$$

$$\Pi = P_1 + P_2$$

sehingga tensor energi – momentum dua fluida tercampur anisotropik ini dapat dituliskan

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + \Pi)V^{\mu}V^{\nu} + (\Psi - \Pi)\chi^{\mu}\chi^{\nu} - \Pi g^{\mu\nu} \tag{10}$$

yang memenuhi aturan $V^{\mu}V_{\mu} = 1$ (*timelike*) dan $\chi^{\mu}\chi_{\mu} = -1$ (*spacelike*) serta $V^{\mu}\chi_{\mu} = 0$ [6].

Rapat energi ε dan tekanan radial Ψ juga dapat dituliskan sebagai

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 - P_1 - P_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + P_1 + P_2)^2 + 4(\rho_1 + P_1)(\rho_2 + P_2)\left[\left(U^{\mu}W_{\mu}\right)^2 - 1\right]} \tag{11}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 - P_1 - P_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1 + P_1 - \rho_2 - P_2)^2 + 4(\rho_1 + P_1)(\rho_2 + P_2)\left(U^{\mu}W_{\mu}\right)^2} \tag{12}$$

Pada koordinat bola dapat dituliskan sebagai $x^0 = t,\quad x^1 = r,\quad x^2 = \theta,\quad x^3 = \phi$ dan kami pilih $V^0V_0 = 1, V^1 = V^2 = V^3 = 0$ serta $\chi^1\chi_1 = -1$ $\chi^0 = \chi^2 = \chi^3 = 0$. Kemudian tensor energi–momentum pada persamaan (10) dapat dituliskan berdasarkan komponen pada koordinat bola, yakni $T_0^0 = \varepsilon$, $T_1^1 = -\Psi$, $T_2^2 = T_3^3 = -\Pi$ di mana ε adalah total rapat energi dua fluida tercampur anisotropik,

Volume 3 Issue 2,
August 2018
p-ISSN: 2541-3384
e-ISSN: 2541-3392

$\Psi = P_r$ adalah tekanan di sepanjang arah radial, dan $\Pi = P_\perp$ adalah tekanan tangensial dengan *r* yang konstan di setiap permukaannya.

Kemudian digunakan metrik Schwarzschild pada persamaan (2) sebagai model materi gelap dua fluida simetri bola untuk menentukan tensor metrik dalam bentuk matriks untuk masing–masing koordinat

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & & & \\ & -e^{\lambda} & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{13}$$

Gunakan persamaan medan gravitasi Einstein pada persamaan (3) untuk menentukan tensor metrik tersebut, dan didapatkan persamaan

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \tag{14}$$

dengan $M(r) = \int \left(4\pi\varepsilon + \frac{\Lambda}{2}\right) r^2 dr$ dan

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2M + 8\pi r^3 \Psi - 2\Lambda r^3/3}{r^2(1-2M/r) - \Lambda r^4/3} \tag{15}$$

sehingga persamaan TOV didapat

$$\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{(\varepsilon + \Psi)(M + 4\pi r^3\Psi - \Lambda r^3/3)}{r^2(1-2M/r) - \Lambda r^4/3} + \frac{2}{r}(\Pi - \Psi) \tag{16}$$

Persamaan (16) dipenuhi sebagai konsekuensi dari kekekalan tensor energi – momentum, $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$.

Kurva rotasi objek ini memberikan metode arah yang sangat penting bagi analisis medan gravitasi di dalam galaksi spiral. Kecepatan objek ini dapat dihitung menggunakan

$$v^2 = e^{-\nu}\left[e^{\lambda}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2\right] \tag{17}$$

untuk orbit lingkaran stabil dipilih $dr/dt = 0$ dan kecepatan tangensial yang dimiliki partikel uji ini dapat dinyatakan sebagai $v_{tg}^2 = e^{-\nu} r^2 (d\Omega/dt)^2$. Kekekalan momentum angular $L = r^2\dot{\phi}$ dan energi $E = e^{\nu(r)}\dot{t}$, sehingga kecepatan tangensial dapat ditulis $v_{tg}^2 = e^{\nu} L^2 / r^2 E^2$ dengan $\theta = \pi/2$. Karena E dan L bernilai eksplisit, maka kecepatan tangensial dapat dinyatakan dengan $v_{tg}^2 = r\nu'/2$ [1], sehingga diperoleh kecepatan tangensial partikel uji ini sebagai fungsi rapat massa total materi gelap dari persamaan (15), yaitu

$$v_{tg}^2(r) = \frac{M + 4\pi r^3\Psi - \Lambda r^3/3}{r(1-2M/r) - \Lambda r^3/3} \tag{18}$$

Persamaan (16), dapat dituliskan mengikuti persamaan (18) menjadi

$$\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{(\varepsilon + \Psi)}{r} v_{tg}^2(r) + \frac{2}{r}(\Pi - \Psi) \tag{19}$$

Selanjutnya, gunakan persamaan (5) dan (6) untuk menentukan potensial efektif yang disubtitusikan ke dalam persamaan

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \kappa \tag{20}$$

Volume 3 Issue 2,
August 2018
p-ISSN: 2541-3384
e-ISSN: 2541-3392

dengan mengganti indeks tersebut dengan koordinat ruang-waktu, sehingga akan didapatkan

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{r^2}+\kappa\right)\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)=\frac{1}{2}E^2 \tag{21}$$

$$V(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{r^2}+\kappa\right)\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right) \tag{22}$$

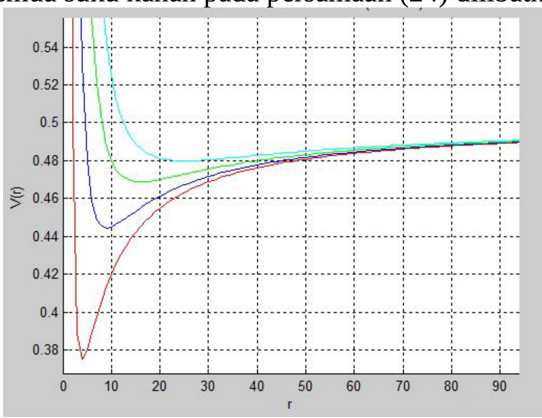
$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}E^2 \tag{23}$$

Dengan menyederhanakan bentuk persamaan (22), maka akan didapat model persamaan potensial efektifnya adalah

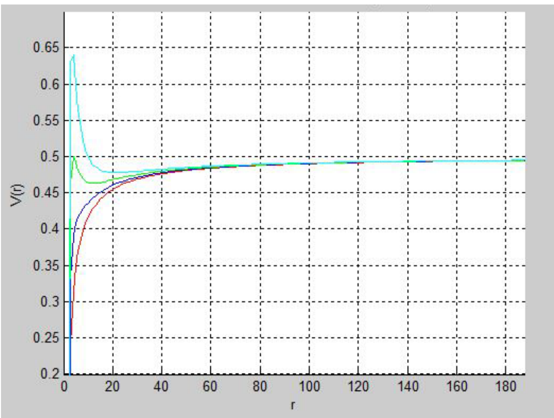
$$V(r)=\frac{1}{2}\kappa-\kappa\frac{M}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{ML^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{6}\left(L^2+\kappa r^2\right) \tag{24}$$

Dimana suku – suku di ruas kanan memiliki karakteristik yang berbeda. Suku pertama hanyalah sebuah konstanta, suku kedua merupakan potensial gravitasi Newton, suku ketiga disebabkan karena partikel uji berotasi, suku keempat merupakan kontribusi dari teori relativitas umum (suku yang memberikan nilai eksak yang sesuai dengan presesi perihelion Merkurius), dan suku kelima ada karena penambahan konstanta kosmologi pada persamaan medan gravitasi Einstein. Ini menunjukkan bahwa eksistensi materi gelap juga dapat diperhitungkan dalam mengkarakteristik gerak rotasi pada sebuah objek.

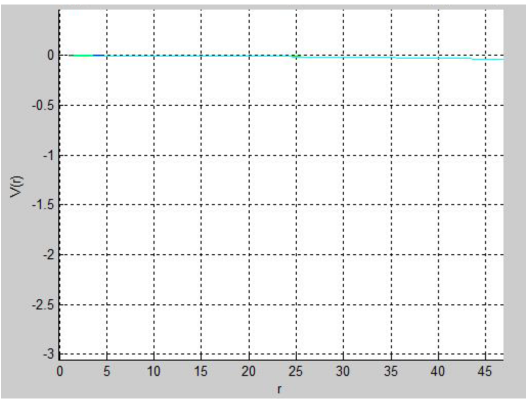
Berdasarkan persamaan (24) ditampilkan grafik potensial efektif terhadap jarak lintasan r sebagaimana diasumsikan bahwa objek ini bersifat masif, $\kappa=1$. Untuk keadaan gravitasi Newton hanya melibatkan tiga suku pertama di ruas kanan (Gambar 1). Bila dimasukkan faktor gravitasi Einstein, suku keempat diikutsertakan (Gambar 2). Bila ditambah konstanta kosmologi membuat semua suku kanan pada persamaan (24) dilibatkan,



Gambar 1. Potensial Efektif di keadaan Gravitasi Newton



Gambar 2. Potensial Efektif di keadaan Gravitasi Einstein



Gambar 3. Potensial Efektif di keadaan Gravitasi Einstein dengan tambahan Konstanta Kosmologi

dengan warna merah L = 2, biru L = 3, hijau L = 4, dan cyan L = 5.

Berdasarkan perbandingan grafik potensial efektif yang ditampilkan di atas bahwa objek ini memiliki variasi nilai $V(r)$ yang signifikan pada r yang kecil dan konstan pada nilai tertentu dengan r yang sangat jauh (perhatikan kembali gambar 1 dan 2), ini menunjukkan bahwa partikel uji yang sangat jauh dari objek masif tersebut akan mengalami lintasan orbit yang konstan setelah mengalami orbit lingkaran stabil pada nilai maksimum $V(r)$ yang terlihat pada gambar 1 dan 2. Tetapi berbeda dengan gambar 3, bahwa penambahan adanya konstanta kosmologi di dalam persamaan (24) menunjukkan bahwa orbit lintasan partikel uji di sekitar objek masif ini menjadi stabil dan bergerak konstan di berapapun nilai r. Hadirnya konstanta kosmologi membuat objek masif tertahan dalam proses ekspansinya. Model persamaan (24) tersebut dapat merepresentasikan model objek masif layaknya materi gelap yang ekspansinya dapat tertahan untuk sementara waktu sedemikian menjadikannya stabil dalam gerak orbitnya di mana hal ini karena didukung keberadaan komponen konstanta kosmologi di alam semesta [7, 8].

SIMPULAN

Berdasarkan perhitungan yang telah didapatkan bahwa model objek materi gelap dua fluida statis tercampur anisotropik memiliki karakteristik yang sama dengan model bintang statik yang terlihat dari persamaan TOV yang dihasilkannya. Dua fluida statis ini telah berubah menjadi satu objek kompak tidak terkopel dengan karakter memiliki besaran kecepatan tangensial dalam kondisi berotasi dan juga besaran potensial efektif. Dari kondisi ini dapat dibuktikan bahwa geometri ruang-waktu di sekitar objek juga akan dipengaruhinya. Dengan asumsi bahwa konstanta kosmologi juga eksis di alam semesta yang memberikan penjelasan yang cukup lengkap mengenai kestabilan suatu model objek masif dan melambatkan ekspansinya walaupun sementara saja, sehingga asumsi dengan adanya penambahan konstanta kosmologi pada penelitian ini dapat mempengaruhi ruang-waktu di sekitarnya, walaupun dalam faktanya adalah nilai eksak konstanta kosmologi ini hanya $\sim 10^{-122}$ dalam satuan Planck yang pada hakikatnya nilai ini sangatlah kecil dibandingkan ukuran alam semesta [8]. Namun riset terhadap konstanta kosmologi masih tetap ada sebagai bentuk observasi keberadaan energi gelap.

REFERENSI

[1] T. Harko and F. S. N. Lobo, “Two-fluid Dark Matter Models,” *Phys. Rev. D.*, vol. 83, 2011.

[2] H. Heintzmann and W. Hillebrandt, “Neutron Stars with an Anisotropic Equation of State: Mass, Redshift, and Stability,” *Astron & Astrophys*, vol. 38, pp. 51-55, 1975.

[3] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,” Cambridge University, John Wiley & Sons, Inc, 1971.

[4] S. M. Carroll, “An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry,” *Addison Wesley*, University of Chicago, 2003.

[5] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D*., vol. 22, pp. 807, 1980; P. S. Letelierand P. S. C. Alencar, *Phys. Rev. D.*, vol. 34, pp 343, 1986.

[6] L. Herrera and N. O. Santos, *Physics Reports*, vol. 286, no. 53, 1997.

[7] F. Kamiab and N. Afshordi, “Neutron Stars and the Cosmological Constant Problem,” *Phys. Rev. D.*, vol. 84, 2011.

[8] S. M. Carroll, “The Cosmological Constant,” *LivingRev. Rel.*, vol. 4, no. 1, 2001.